

文章编号:1000-8055(2013)05-1192-09

一种考虑齿轮副连续啮合过程的接触有限元动力学分析方法

吴勇军, 王建军

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 在系统分析齿轮副连续啮合过程不同典型啮合状态特点的基础上,提出了一种可以考虑齿轮副连续啮合过程中啮合齿对变化、加载弹性变形以及滑动摩擦等影响因素的接触有限元分析方法。利用该方法对三种考虑不同因素的齿轮副模型进行了对比分析,并得到了各种因素对齿轮副连续啮合过程动态传递误差及动态接触力特性的影响。研究表明:该方法可以真实模拟齿轮副连续啮合过程中单、双齿对啮合及其交替啮合状态的动力学特性,包括滑动摩擦引起的节点冲击、加载弹性变形引起的啮入、啮出冲击以及时变刚度等激励特性;并可以得到啮入、啮出冲击的大小及作用时间,以及滑动摩擦和齿廓修形对动态啮合特性的影响;动态啮合特性分析结果与齿轮副连续啮合状态的特征完全吻合。

关 键 词: 齿轮副; 动态啮合特性; 接触有限元分析方法; 时变刚度; 啮合冲击; 滑动摩擦

中图分类号: TH132; V233.1

文献标志码: A

A contact finite element method for dynamic analysis of continuous engaged gear pairs

WU Yong-jun, WANG Jian-jun

(School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on the analysis of the characteristics for different typical meshing states, a dynamic contact finite element analysis method, considering the variation of the engaged tooth pairs, the loaded elastic deformations and the sliding friction, was presented for the continuous engaged gear pairs. Then the dynamic transmission errors and the dynamic contact force for three kinds of continuous engaged gear models were compared using the presented method, and the effects of each factor on the dynamic meshing characteristics were obtained. The results show that the presented method is effective on simulating the more actual dynamic meshing characteristics of continuous engaged gear pairs in single or double tooth pair contact, including the pitch point impact caused by sliding friction, the meshing impact and the time-varying meshing stiffness excitation caused by elastic deformation. The impact force and time of the approach and recess meshing impact, the influence of the sliding friction and tooth profile modification on dynamic meshing characteristics were also obtained by the presented method. And the dynamic meshing characteristics gotten from the presen-

收稿日期: 2012-06-02

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130508.0949.201305.1192_032.html

作者简介: 吴勇军(1983—),男,四川安岳人,博士生,主要从事机械传动系统振动噪声方面的研究。

通讯作者: 王建军(1956—),男,江苏苏州人,教授、博士生导师,博士,研究方向为航空宇航推进装置强度振动、振动抑制、机械结构与机械传动系统振动与振动抑制。

ted method is quite accordant with the characteristics of the continuous engaged gear drives for typical meshing states.

Key words: gear pairs; dynamic meshing characteristics;
contact finite element analysis (FEA) method;
time-varying meshing stiffness; meshing impact; sliding friction

齿轮系统作为主要的动力和运动传递装置,广泛应用于机械、航空和船舶等行业,其动力学行为和工作性能对整个机械设备具有非常重要的影响^[1].然而,齿轮副在连续啮合过程中,由于啮合齿对数的变化、受载弹性变形以及滑动摩擦等因素的影响,将产生重要的动态内部激励,即时变刚度激励、啮入啮出冲击及节点冲击激励等,从而引起齿轮系统的振动、冲击和噪声.因此,研究齿轮副连续啮合过程的动力学特性对于齿轮系统的振动机理研究及动态设计都具有重要意义.

长期以来,对于齿轮副的时变刚度激励及其作用下的动态特性,国内外学者采用集中参数法及有限元法进行了大量研究^[1-7].其中文献^[3-4]采用的是假设和简化形式的啮合刚度,文献^[5-7]则采用静态接触有限元法计算得到的时变啮合刚度.虽然,利用静态接触有限元分析方法可以得到较“真实”的时变刚度形式或静态传递误差,但由于是通过分别计算有限啮合位置的静态变形而得到,并不能真实反映齿轮副连续啮合过程中各种因素的相互作用.而对于啮合冲击激励则主要采用有限元法^[5-6,8-10]进行研究.但这些文献中所研究的啮合冲击激励主要是考虑齿侧间隙及加工安装误差等因素所引起的冲击激励,而非齿轮副连续啮合过程中由于受载弹性变形引起的啮入啮出冲击或由滑动摩擦引起的节点冲击激励.因此,需要将齿轮副的传动过程作为一个连续的弹性动态啮合过程,才能更好地研究其动力学特性.

随着高性能计算机技术的不断发展,人们已利用动态接触有限元法来研究齿轮副连续啮合过程的动态特性.Bajer等^[11]基于能量守恒的观点,利用二维行星齿轮系统的刚体接触有限元分析模型,研究了行星齿轮系统的动态接触冲击问题.Lundvall等^[12]进一步在考虑轮体刚体运动基础上叠加轮齿的弹性变形,提出了一种考虑摩擦的直齿轮柔性多体接触分析方法.Parker等^[13]利用二维有限元/接触力学模型研究了具有时变刚度和轮齿间隙的直齿轮副的动态响应,并利用该方法研究了行星齿轮系统^[14-15]的动态特性.Hu

等^[16]基于显式动态有限元分析方法研究了不同变位系数及螺旋角参数的斜齿轮副瞬态啮合特性.虽然上述研究对于齿轮副动态啮合特性分析具有重要的意义,但仍缺乏一种可综合考虑齿轮副连续啮合过程中啮合齿对变化、受载弹性变形和滑动摩擦等因素及其相互作用的接触有限元分析方法.

因此,本文在系统分析齿轮副连续啮合过程不同典型啮合状态特点的基础上,提出一种可以考虑齿轮副连续啮合过程中啮合齿对变化、受载弹性变形及滑动摩擦等多种影响因素的接触有限元分析方法.然后,通过典型齿轮副3种分析模型的对比分析,说明本文提出的方法研究齿轮副连续啮合过程中动态啮合特性的有效性.

1 齿轮副动力学方程建立

通过建立啮合齿轮副的精确实体模型,并利用等参元对其进行离散,便可得到啮合齿轮副的有限元分析模型.然后,在主动齿轮上施加驱动转速,在从动齿轮上施加负载扭矩,并把分析过程离散成时间序列: $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T$.该分析模型无需额外的假设和简化,可以更加接近真实的齿轮副模型及载荷条件.

齿轮副在啮合过程中某个时刻 t 的动态接触力学模型如图1所示.图中 ${}^tV_g$ 和 ${}^tV_p$ 分别表示主动齿轮(driving gear)和从动齿轮(driven gear) t 时刻的位形, ${}^tS_g$ 和 ${}^tS_p$ 分别为主、从动齿轮接触齿面,它们相互接触界面记为 ${}^tS_c = {}^tS_g \cap {}^tS_p$, ${}^tS_c$ 在主、从动齿面上分别记为 S_c^g 和 S_c^p , ${}^tF_g^e$ 和 ${}^tF_p^e$ 分别为它们的外载荷向量.为便于描述齿轮副的运动状态,分别以主、从动齿轮圆心 O_1 和 O_2 为原点建立整体笛卡儿坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$ 和 $O_2-x_2y_2z_2$.此外,为便于描述轮齿间的接触力学关系,在轮齿间的接触位置处建立图中所示的局部笛卡儿坐标系 $O'-x'y'z'$,它在3个方向的单位向量分别为 ${}^te_1$, ${}^te_2$ 和 ${}^te_n$,其中 ${}^te_n$ 垂直于相互接触的两轮齿齿面,且指向从动轮接触齿面的外法线方向, ${}^te_1$ 和 ${}^te_2$ 均位于两轮齿接触齿面的公切

平面内, 则主、从动齿轮接触齿面上的接触力向量分别为 ${}^tF_c^g$ 和 ${}^tF_c^p$, 它们在局部坐标系下各分量的方向与局部坐标系一致.

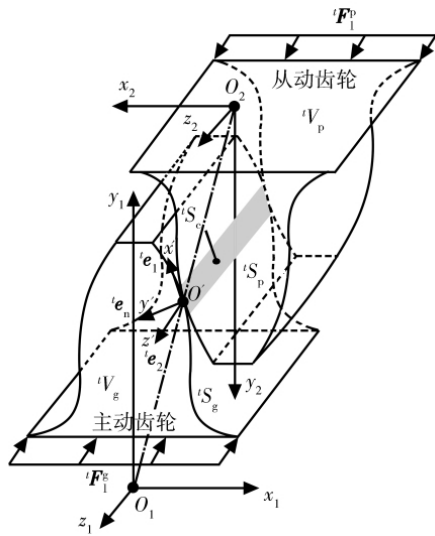


图 1 齿轮副动态接触模型

Fig. 1 Dynamic contact model of gear pairs

为了研究齿轮副连续啮合过程中的动力学特性, 就必须求得齿轮副啮合过程中每个时刻的动力学参数. 然而, 齿轮副在啮合过程中每一个下一时刻的接触位置和状态都是事先未知的, 但都与之前的已知接触状态密切相关, 且可以根据前面的已知接触状态进行确定. 因此, 齿轮副动态啮合过程的求解需采用增量形式的求解方法. 主要的增量形式求解方法有完全拉格朗日格式和更新拉格朗日格式. 对于齿轮副动态啮合这类接触问题, 通常采用更新拉格朗日格式的增量形式. 因此, 根据虚位移原理^[17] 分别建立主、从动齿轮运动方程, 并采用增量形式表示, 即可得到齿轮副动态啮合过程的增量形式运动方程:

$$\begin{cases} M_g {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_g + C_g {}^{t+\Delta t}\dot{u}_g + {}^tK_g u_g = {}^{t+\Delta t}F_1^g + {}^{t+\Delta t}F_c^g - {}^tF^g \\ M_p {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_p + C_p {}^{t+\Delta t}\dot{u}_p + {}^tK_p u_p = {}^{t+\Delta t}F_1^p + {}^{t+\Delta t}F_c^p - {}^tF^p \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}u_g &= \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}x_1 \\ {}^{t+\Delta t}y_1 \\ {}^{t+\Delta t}z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^0x_1 \\ {}^0y_1 \\ {}^0z_1 \end{bmatrix} \\ {}^tu_g &= \begin{bmatrix} {}^tx_1 \\ {}^ty_1 \\ {}^tz_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^0x_1 \\ {}^0y_1 \\ {}^0z_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}u_p &= \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}x_2 \\ {}^{t+\Delta t}y_2 \\ {}^{t+\Delta t}z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^0x_2 \\ {}^0y_2 \\ {}^0z_2 \end{bmatrix} \\ {}^tu_p &= \begin{bmatrix} {}^tx_2 \\ {}^ty_2 \\ {}^tz_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^0x_2 \\ {}^0y_2 \\ {}^0z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_g = {}^{t+\Delta t}u_g - {}^tu_g, \quad u_p = {}^{t+\Delta t}u_p - {}^tu_p \quad (4)$$

式中 M_g 和 M_p 分别是主、从动齿轮参考于初始时刻 $t = 0$ 的单元质量矩阵; C_g , C_p 分别是主、从动齿轮对应的单元阻尼矩阵; ${}^tK_g$, ${}^tK_p$ 分别是主、从动齿轮参考 t 时刻的单元刚度矩阵, 由该时刻齿轮副的位形 (位置和形状) 所决定; ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}_g$, ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}_p$ 分别是 $t + \Delta t$ 时刻的单元结点加速度向量; ${}^{t+\Delta t}\dot{u}_g$, ${}^{t+\Delta t}\dot{u}_p$ 分别是 $t + \Delta t$ 时刻的单元结点速度向量; 而 u_g 和 u_p 是单元结点位移的增量向量, 即单元结点从 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻之间的位移增量; ${}^{t+\Delta t}F_1^g$, ${}^{t+\Delta t}F_1^p$ 为对应结点载荷向量; ${}^{t+\Delta t}F_c^g$, ${}^{t+\Delta t}F_c^p$ 为等效结点接触力向量; ${}^tF^g$, ${}^tF^p$ 是 t 时刻的结点内力向量.

通过整理即可得到齿轮副的运动方程为

$$M {}^{t+\Delta t}\ddot{u} + C {}^{t+\Delta t}\dot{u} + {}^tKu = {}^{t+\Delta t}F_1 + {}^{t+\Delta t}F_c - {}^tF \quad (5)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} M_g & 0 \\ 0 & M_p \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_g & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix}, \quad {}^tK = \begin{bmatrix} {}^tK_g & 0 \\ 0 & {}^tK_p \end{bmatrix} \quad (6)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_g \\ {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_p \end{bmatrix}, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{u} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\dot{u}_g \\ {}^{t+\Delta t}\dot{u}_p \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_g \\ u_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}F_1 &= \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}F_1^g \\ {}^{t+\Delta t}F_1^p \end{bmatrix}, \quad {}^{t+\Delta t}F_c = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}F_c^g \\ {}^{t+\Delta t}F_c^p \end{bmatrix} \\ {}^tF &= \begin{bmatrix} {}^tF^g \\ {}^tF^p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

2 齿轮副典型啮合状态分析

在得到系统动力学方程 (5) 以后, 若要求解齿轮副的连续啮合过程, 则确定齿轮副动态啮合过程的接触力向量 ${}^{t+\Delta t}F_c$ 成为其中的关键. 因此, 本节将在系统分析齿轮副连续啮合过程中不同典型啮合状态特点的基础上, 给出对应状态的动态接触力向量 ${}^{t+\Delta t}F_c$ 的表达式.

为了便于描述齿轮副的连续啮合过程, 本文仅以重合度 $1 < \epsilon < 2$ 的齿轮副为例进行说明, 其

齿廓上的接触区域如图2所示. 对于重合度 $\varepsilon > 2$ 的齿轮副也可进行类似的分析处理. 当一对轮齿在接触起点(initial contact point, ICP)进入啮合时, 另一对轮齿将在单齿啮合高点(highest point of single tooth contact, HPSTC)进行啮合, 齿轮副进入双齿对接触区域(double tooth pair contact area); 当一对轮齿啮合到达单齿啮合低点(lowest point of single tooth contact, LPSTC)时, 另一对轮齿将在接触终点(final contact point, FCP)退出啮合, 齿轮副进入单齿对啮合区域(single tooth pair contact area), 如此循环形成齿轮副连续的啮合过程. 因此, 可以将齿轮副连续啮合过程分为: 单齿对啮合, 双齿对啮合, 单-双齿对交替啮合以及双-单齿对交替啮合4个典型啮合状态.

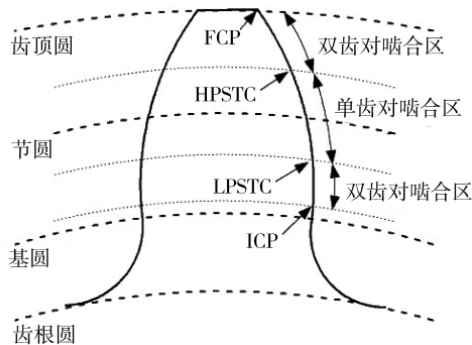


图2 齿廓接触区域

Fig. 2 Contact areas of tooth profile

2.1 单齿对啮合状态分析

如图3所示, 仅一对轮齿在齿轮副单齿对啮合区域 EF 内的 C 点相互啮合, 其动态接触力学模型如图1所示. 由罚函数法可知, 齿轮副单齿对啮合状态时从动齿轮的单元结点等效接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p$ 为

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p = & -a\mathbf{N}_c^T(-\mu\frac{\bar{u}_1}{u_t}{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_1 - \mu\frac{\bar{u}_2}{u_t}{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_2 + {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_n) \times \\ & ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_n^T\mathbf{N}_c\mathbf{u}_c + {}^t\bar{g}_n) = \mathbf{F}_{t_1}^p + \mathbf{F}_{t_2}^p + \mathbf{F}_n^p \end{aligned} \quad (9)$$

当不考虑滑动摩擦时 $\mu = 0$, 则有

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p = & -a\mathbf{N}_c^T{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_n({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_n^T\mathbf{N}_c\mathbf{u}_c + {}^t\bar{g}_n) = \mathbf{F}_n^p \end{aligned} \quad (10)$$

式中 a 为法向罚参数, $\mathbf{N}_c$ 为单元结点插值函数, μ 为滑动摩擦因数, $\bar{u}_i$ 为接触点对间从 t 时刻到

$t + \Delta t$ 时刻的切向位移增量, $\bar{u}_1$ 和 $\bar{u}_2$ 分别为 $\bar{u}_t$ 在两个切线方向的分量, ${}^t\bar{g}_n$ 为 t 时刻接触点对间的法向距离, $\mathbf{u}_c$ 为接触点对间 t 到 $t + \Delta t$ 时刻间的相对法向位移.

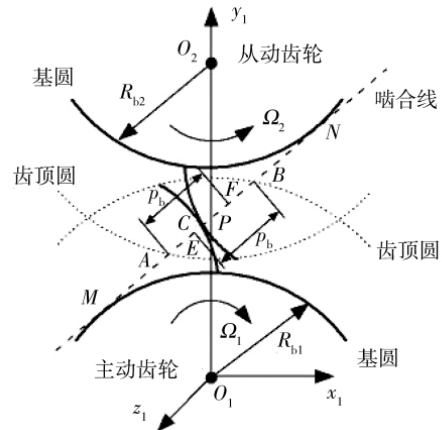


图3 齿轮副单齿对啮合状态

Fig. 3 Single tooth pair contact of gear pairs

当考虑轮齿间的滑动摩擦时, 齿轮副间相对速度及摩擦力关系如图4中所示. 由渐开线圆柱齿轮传动原理及齿轮副间几何关系可得

$$O_1K/O_2H = O_1P/O_2P = O_1M/O_2N = \Omega_2/\Omega_1 \quad (11)$$

对于标准渐开线齿轮副, 在沿理论啮合线 MN 的方向上, 从动齿轮与主动齿轮间的相对速度始终有

$$v_{MN} = O_2N \times \Omega_2 - O_1M \times \Omega_1 = 0 \quad (12)$$

即标准齿轮副沿理论啮合线 MN 方向的相对速度始终为0, 这也是齿轮副平稳转动的基本前提. 此外, 在垂直于 MN 方向的相对速度还具有以下关系. 首先在节点 P 处有

$$v_t^P = O_2H \times \Omega_2 - O_1K \times \Omega_1 = 0 \quad (13)$$

亦即齿轮副在节点处不存在相对滑动, 摩擦力为0. 而对于节点两侧的 L 和 S 啮合点则有

$$v_t^L = (O_2H + l_1) \times \Omega_2 - (O_1K - l_1) \times \Omega_1 > 0 \quad (14)$$

$$v_t^S = (O_2H - l_2) \times \Omega_2 - (O_1K + l_2) \times \Omega_1 < 0 \quad (15)$$

因此, 根据库伦摩擦定理可知 L 和 S 点的摩擦力如图4中所示. 可见齿轮副在节点前后摩擦力方向将发生改变, 引起所谓的节点冲击.

2.2 双齿对啮合状态分析

图5所示为齿轮副双齿对啮合状态. 其中齿对 $1-1'$ 和 $2-2'$ 分别在双齿啮合区 AE, FB 内的

$C1, C2$ 点相互接触. 令从动齿轮 $t+\Delta t$ 时刻在 $C1$ 和 $C2$ 点的结点等效接触力向量分别为 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C1}^p$ 和 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C2}^p$, 则双齿对啮合状态时从动齿轮的结点等效接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p$ 为

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C1}^p + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C2}^p \quad (16)$$

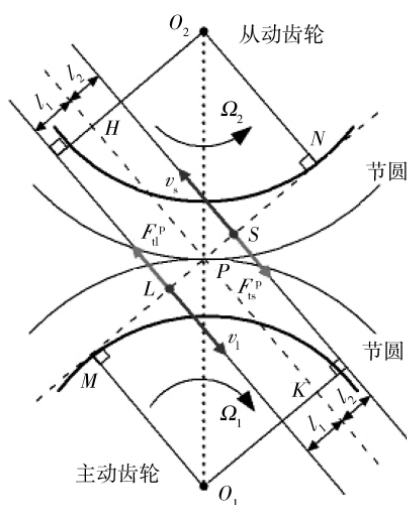


图 4 齿轮副间相对速度及摩擦力

Fig. 4 Relative velocity and friction force of gear pairs

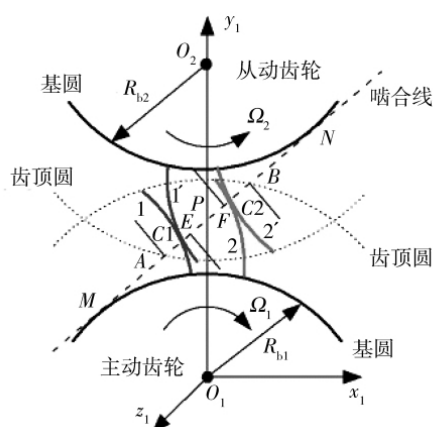


图 5 齿轮副双齿对啮合状态

Fig. 5 Double tooth pair contact of gear pairs

当考虑滑动摩擦时有

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{Ci}^p = \\ & -a\mathbf{N}_{Ci}^T \left(-\mu \frac{\bar{u}_{1i}}{u_{ti}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{1i} - \mu \frac{\bar{u}_{2i}}{u_{ti}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{2i} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{ni} \right) \times \\ & ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{ni}^T \mathbf{N}_{Ci} \mathbf{u}_{Ci} + {}^t\bar{g}_{ni}) = \mathbf{F}_{t1}^{pi} + \mathbf{F}_{t2}^{pi} + \mathbf{F}_n^{pi} \\ & i = 1, 2 \end{aligned} \quad (17)$$

不考虑滑动摩擦时则有

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{Ci}^p = \\ & -a\mathbf{N}_{Ci}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{ni} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{ni}^T \mathbf{N}_{Ci} \mathbf{u}_{Ci} + {}^t\bar{g}_{ni}) = \mathbf{F}_n^{pi} \end{aligned}$$

$$i = 1, 2 \quad (18)$$

2.3 单-双齿对交替啮合状态分析

图 6 所示为齿轮副由单齿对啮合向双齿对啮合交替的啮合状态. 在理想啮合情况下, 当齿对 $1-1'$ 啮合到达单齿对啮合的高点 F 时, 齿对 $2-2'$ 本应在啮合起点 A 处平稳地进入双齿对啮合状态. 但由于齿轮副的受载弹性变形, 主动齿轮的实际啮合基节将小于理论啮合基节, 而从动齿轮的实际啮合基节将大于理论啮合基节, 主动齿轮的实际啮合基节将小于从动齿轮的实际啮合基节, 使得从动齿轮的实际位置与理论位置间存在角度为 θ 的偏差. 因此, 当前一齿对 $1-1'$ 尚未啮合到达 F 点时, 后一齿对 $2-2'$ 在理论啮合线外的 A' 提前进入啮合, 此时两对轮齿的啮合点具有不同的啮合节点 P 和 P' . 由于齿对 $2-2'$ 在 A' 点进入啮合时的节点为 P' , 从动齿轮的瞬时节圆半径突然变小, 从动轮将从正常的转速骤然提速. 在齿对 $2-2'$ 恢复正常啮合之前, 它将沿 $A-A'$ 段进行啮合. 在整个交替过程中, 由于齿对 $2-2'$ 的从动轮转速大于齿对 $1-1'$ 的从动轮转速, 在齿对 $2-2'$ 间将产生额外的冲击力, 即通常所说的啮入冲击.

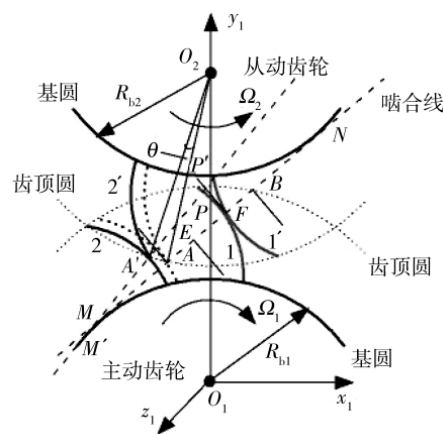


图 6 齿轮副单-双齿对交替啮合状态

Fig. 6 Single-to-double tooth pair contact of gear pairs

对于啮合齿对 $1-1'$, 从动齿轮的等效接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C1}^p$ 可由式 (17)、式 (18) 计算得到. 而齿对 $2-2'$ 处从动轮的等效接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C2}^p$ 则为

$$\begin{aligned} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C2}^p = \\ & -a\mathbf{N}_{C2}^T \left(-\mu \frac{\bar{u}_{12}}{u_{t2}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{12} - \mu \frac{\bar{u}_{22}}{u_{t2}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{22} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{n2} \right) \times \\ & ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{n2}^T \mathbf{N}_{C2} \mathbf{u}_{C2} + {}^t\bar{g}_{n2}) = \mathbf{F}_{t1}^{p2} + \mathbf{F}_{t2}^{p2} + \mathbf{F}_n^{p2} \end{aligned} \quad (19)$$

当不考虑滑动摩擦时,则有

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C2}^p = -a\mathbf{N}_{C2}^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{n2}({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}_{n2}^T \mathbf{N}_{C2} \mathbf{u}_{C2}' + {}^t\mathbf{g}_{n2}) = \mathbf{F}_n^{p2} \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{u}_{C2}' = \mathbf{u}_{C2} + \Delta \mathbf{u} \quad (21)$$

式中 $\mathbf{u}_{C2}'$ 为齿对 2-2' 从 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻的位移实际增量, $\mathbf{u}_{C2}$ 为齿对 2-2' 按原转速传动时的位移增量,而 $\Delta \mathbf{u}$ 则是由于从动轮转速的骤升引起的沿理论啮合线方向附加位移增量,也就是沿接触齿面法线方向的附加位移增量.因此,由于 $\Delta \mathbf{u}$ 的存在,在整个交替过程中,齿对 2-2' 间将产生较大冲击载荷,即常说的啮入冲击激励.

2.4 双-单齿对交替啮合状态分析

图7所示为齿轮副由双齿对啮合向单齿对啮合的交替状态.在理想状态下,当齿对 1-1' 啮合到达单齿对啮合低点 E 时,齿对 2-2' 将在啮合终点 B 处退出啮合状态,齿轮副由此进入单齿对啮合状态.但由于齿轮副受载弹性变形的存在,主动齿轮的实际啮合基节大于从动齿轮的实际啮合基节,因此,齿对 2-2' 在到达 B 点时并不会退出啮合,而是继续啮合直到啮合线外的 B' 才退出啮合状态.在此过程中,齿对 2-2' 将沿 $B-B'$ 段啮合,此时啮合齿对 1-1' 与齿对 2-2' 具有不同的啮合节点 P 和 P' .从图中可知,齿对 2-2' 的啮合节点将使得从动齿轮的转速骤降,因此在啮合齿对 2-2' 间同样会存在较大的冲击激励,即通常所说的啮出冲击.

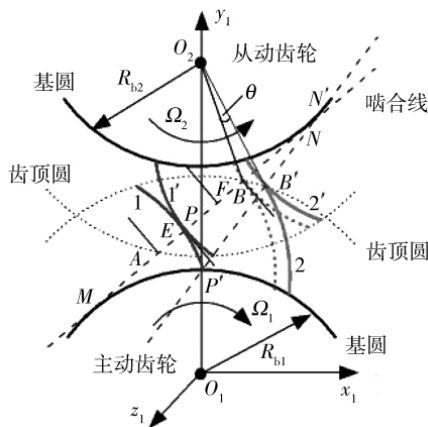


图7 齿轮副双-单齿对交替啮合状态

Fig. 7 Double-to-single tooth pair contact of gear pairs

同理,啮合齿对 1-1' 的从动齿轮的等效接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C1}^p$ 可由式(17)、式(18)计算得到.而齿对 2-2' 处从动轮的等效接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{C2}^p$ 也可由式(19)、式(20)计算得到.不同的是:此时的 $\Delta \mathbf{u}$ 是由于齿对 2-2' 在 $B-B'$ 区域内啮合使得从动轮转速下降,而齿对 1-1' 迫使从动轮按原转速传动,从而使得齿对 2-2' 在接触面法线方向产生附加位移增量.这也是齿对 2-2' 产生冲击载荷的主要原因,并将持续整个 $B-B'$ 的啮合过程.

3 齿轮副动态啮合过程求解

通过前面的分析已经得到了齿轮副动态啮合过程的动力学方程,并且得到了啮合过程不同啮合状态的等效结点接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c$,将其代入动力学方程(5)即可进行方程的求解.本文采用两步形式的中心差分法进行求解.因此

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + {}^t\dot{\mathbf{u}}\Delta t + \frac{1}{2}{}^t\ddot{\mathbf{u}}(\Delta t)^2 \quad (22)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}({}^t\ddot{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}})\Delta t \quad (23)$$

式(22)表明,当上一增量步的解 ${}^t\mathbf{u}$, ${}^t\dot{\mathbf{u}}$ 和 ${}^t\ddot{\mathbf{u}}$ 求得以后,下一增量步的位移 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ 是在求解前即可计算出的已知量.进而下一增量步的结点外载荷向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_1$ 、结点接触力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c$ 以及内力向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ 等各力学参量也将可以求得.

将式(22)和式(23)代入方程(5)中,即可得到以下的逐步递推求解公式:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = (\mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t\mathbf{C})^{-1} \cdot \left[{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_1 + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - \left({}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}{}^t\ddot{\mathbf{u}}\Delta t \right)\mathbf{C} \right] \quad (24)$$

其中 $t + \Delta t$ 时刻的结点内力向量为 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$, 即

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + {}^t\mathbf{K}\mathbf{u} = \sum_e \int_V {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_1^T {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}_t dV \quad (25)$$

将求得的 $t + \Delta t$ 时刻的位移向量 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ 和加速度向量 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ 代入公式(23),即可得到 $t + \Delta t$ 时刻的速度向量 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$.如此反复即可求得整个过程的各个力学参量,具体的求解流程如图8所示.

由于中心差分法是条件稳定的算法,根据其稳定性条件,可得时间步长的选取原则为

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = T_n/\pi = L/c_w \quad (26)$$

其中 Δt_{cr} 为问题求解的临界步长, T_n 是系统的最小固有振动周期, L 为单元的特征尺度, c_w 为材料声速,可根据不同单元类型计算得到.对于实体

单元有

$$L = V_e / A_{\text{emax}} \quad (27)$$

$$c_w = \sqrt{E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)\rho]} \quad (28)$$

其中 V_e 为单元体积, A_{emax} 为单元最大一侧面积。

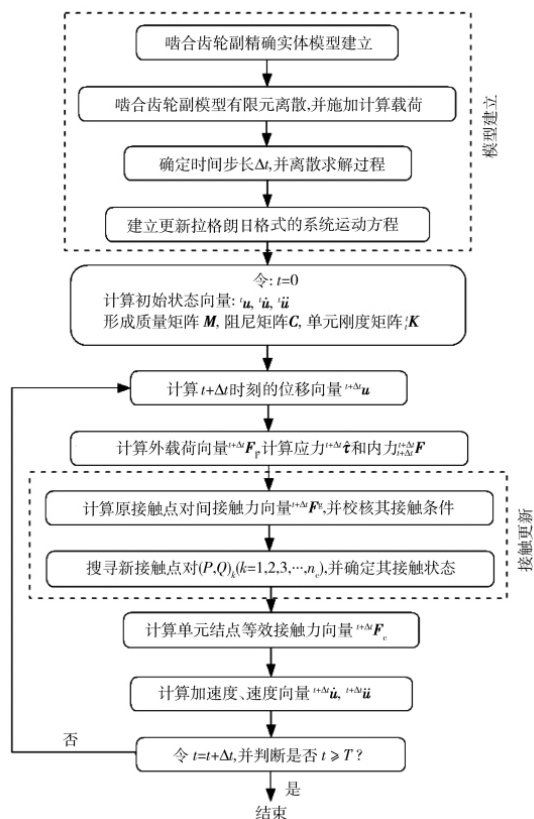


图8 齿轮副连续啮合过程有限元分析流程

Fig. 8 Finite element analysis flow of continuous engaged gear pairs

4 齿轮副动态啮合过程仿真分析

为验证本文提出分析方法的有效性, 本节将以一对直齿轮副为例, 研究其在考虑不同的影响因素下的动态啮合特性。文中直齿轮副的几何参数如下: 齿数为 36/36, 模数为 3.18 mm, 压力角为 20° , 齿宽为 25.4 mm, 齿顶倒圆半径为 0.5 mm, 重合度为 1.69, 标准中心距安装, 且暂不考虑齿侧间隙、加工及安装误差的影响。根据渐开线方程以及渐开线圆柱齿轮啮合原理^[18], 可建立精确的直齿轮副啮合模型, 并进行有限元离散可得图 9 所示的啮合齿轮副有限元接触分析模型。

为分析齿轮副啮合过程中不同啮合状态下的动力学特性, 本文分别采用了考虑滑动摩擦的修形齿轮副、无摩擦的修形齿轮副和无摩擦的未修形齿轮副 3 种分析模型。文中的修形齿轮副模型

为从动轮齿顶和齿根处最大修形量分别为 0.02 mm 和 0.01 mm, 修形曲线采用抛物线短修形形式的齿廓修形齿轮副。计算时滑动摩擦因数选取为 0.15, 主动轮驱动转速为 60 r/min, 从动轮负载扭矩为 143.6 N·m。

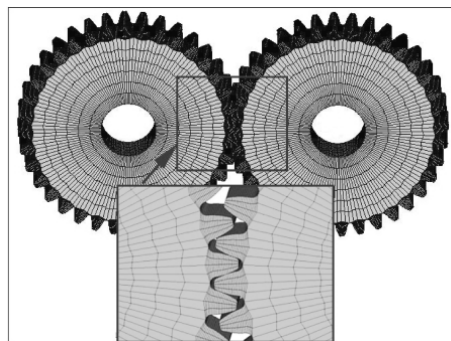


图9 齿轮副有限元模型

Fig. 9 Finite element model of gear pairs

本文选取从动齿轮实际角位移与理论角位移的偏差, 即动态传递误差 (dynamic transmission error, DTE) 和动态接触力作为指标, 分析齿轮副连续啮合过程的动态特性。由于负载扭矩恒定, 动态传递误差也就反映了齿轮副连续啮合过程中的时变啮合刚度特性。为了更好地对比分析不同模型计算结果的规律, 我们对计算得到的结果利用小波包分解技术对其进行降噪处理, 消除高频振动 (噪声) 的影响。3 种分析模型的计算结果分别如图 10~图 12 所示。

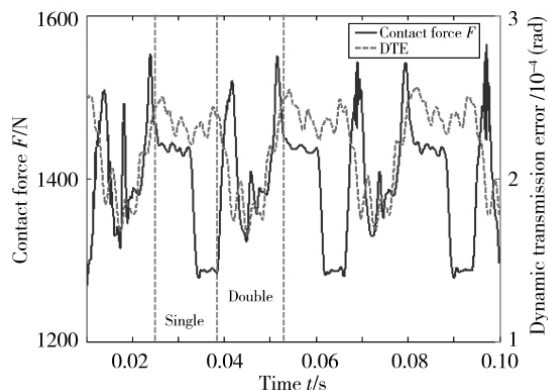


图10 有摩擦修形齿轮副 DTE 和接触力

Fig. 10 DTE and contact force of modified gear pairs with friction

根据图 10~图 12 中所示齿轮副不同分析模型动态传递误差 DTE 及接触力的计算结果, 可以明显地得到齿轮副连续的动态啮合过程中单、双齿对啮合及其交替状态的动力学特性: 在单齿

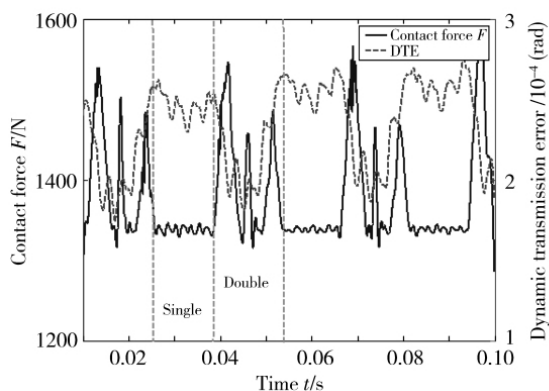


图 11 无摩擦修形齿轮副 DTE 和接触力

Fig. 11 DTE and contact force of modified gear pairs without friction

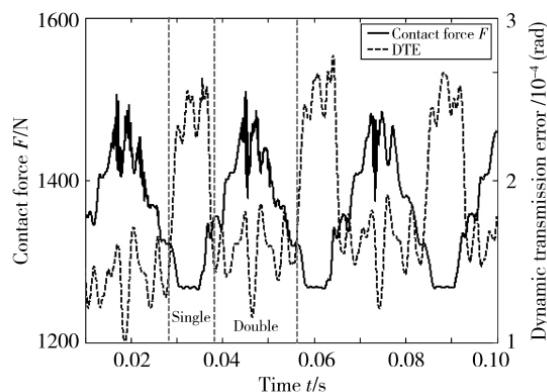


图 12 无摩擦未修形齿轮副 DTE 和接触力

Fig. 12 DTE and contact force of unmodified gear pairs without friction

对啮合区域内,对于同样的修形齿轮副模型,无滑动摩擦时的接触力曲线比较平稳,而考虑滑动摩擦时的接触力在节点处发生突变,即存在明显的节点冲击现象;而在单、双齿对啮合交替过程中,由于啮合过程中的受载弹性变形,齿轮副间的接触力也具有明显的冲击现象,即分别对应啮入、啮出冲击。以上动态啮合特性分析结果与齿轮副连续啮合过程中不同典型啮合状态的特点完全吻合,且较已有研究^[10-12]能更真实地描述齿轮副连续啮合过程的动态特性。

此外,从图中还可以进一步分析啮入、啮出冲击的大小及作用时间,以及滑动摩擦和齿廓修形对动态啮合特性的影响。滑动摩擦对齿轮副动态传递误差和啮入啮出冲击的影响不大,它主要是引起节点冲击激励;而齿廓修形则主要影响齿轮副的啮入啮出过程,修形齿轮副的啮合冲击幅值和冲击时间都明显小于未修形齿轮副的计算结

果。由此可见,本文提出的齿轮副连续啮合过程的接触有限元分析方法不但可以有效地分析齿轮副连续啮合过程不同啮合状态的动力学特性,而且还可以研究滑动摩擦及齿廓修形等因素对齿轮副啮合特性的影响。

5 结 论

通过上述研究,可以得出以下结论:

1) 提出了一种可综合考虑齿轮副连续啮合过程中啮合齿对变化、受载弹性变形及滑动摩擦等因素的接触有限元动力学分析方法。

2) 本文提出的分析方法不但可以有效地分析齿轮副连续啮合过程中不同啮合状态的动力学特性,包括节点冲击、啮入冲击、啮出冲击等激励特性,而且还可以研究滑动摩擦及齿廓修形等对齿轮副啮合特性的影响。

因此,本文的方法可为齿轮副连续啮合过程的动力学特性分析,以及综合考虑受载弹性变形、齿廓修形及滑动摩擦等因素的齿轮副振动机理研究及动态设计提供有效的分析工具。

限于篇幅,关于考虑齿侧间隙、加工及安装误差、高重合度($\epsilon > 2$)以及多级齿轮传动系统连续啮合过程动态特性的研究将在后续工作中进一步介绍。

参考文献:

- [1] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学[M]. 北京:科学出版社,1997.
- [2] WANG Jianjun, LI Runfang, PENG Xianghe. A survey to non-linear vibration of gear transmission system[J]. Journal of Applied Mechanics Review, 2003, 56(3): 309-329.
- [3] Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 142(1): 49-75.
- [4] Vaishya M, Singh R. Analysis of periodically varying gear mesh systems with coulomb friction using Floquet theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 243(3): 525-545.
- [5] 李润方,陶泽光,林腾蛟,等. 齿轮啮合内部激励数值模拟[J]. 机械传动, 2001, 25(2): 1-3.
LI Runfang, TAO Zeguang, LIN Tengjiao, et al. Numerical simulation for inner dynamic excitation of gearing[J]. Mechanical Transmission, 2001, 25(2): 1-3. (in Chinese)
- [6] 林腾蛟,杨妍妮,李润方,等. 弧齿锥齿轮传动内部动态激励数值仿真[J]. 重庆大学学报, 2009, 32(6): 609-613.
LIN Tengjiao, YANG Yanni, LI Runfang, et al. Numerical simulation of the internal dynamic excitation of a spiral bevel gear transmission [J]. Journal of Chongqing University, 2009, 32(6): 609-613. (in Chinese)

- [7] HE Song, Gunda R, Singh R. Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301(3/4/5): 927-949.
- [8] 欧垣安, 李润方, 龚剑霞. 三维冲击: 动力接触问题的有限元混合算法[J]. 重庆大学学报, 1994, 17(2): 52-57.
OU Hengan, LI Runfang, GONG Jianxia. A mixed finite element algorithm of three-dimensional impact-dynamic contact problems[J]. Journal of Chongqing University, 1994, 17(2): 52-57. (in Chinese)
- [9] LIN Tengjiao, LI Runfang, CHEN Bingkui, et al. Nonlinear dynamic contact analysis of meshing gears[C]//Proceedings of The International Conference on Mechanical Transmission (ICMT2001). Chongqing, China: Chongqing University, 2001: 248-251.
- [10] LIN Tengjiao, OU Hengan, LI Runfang. A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(9/10/11/12): 1716-1728.
- [11] Bajer A, Demkowicz L. Dynamic contact/impact problems, energy conservation, and planetary gear trains[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002, 191(37/38): 4159-4191.
- [12] Lundvall O, Stromberg N, Klarbing A. A flexible multi-body approach for frictional contact in spur gears[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 278(3): 479-499.
- [13] Parker R G, Vijayakar S M, Imajo T. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(3): 435-455.
- [14] Parker R G, Agashe V, Vijayakar S M. Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/contact mechanics model[J]. Transactions of the ASME, 2000, 122(3): 304-310.
- [15] Ambarisha V K, Parker R G. Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 302(3): 577-595.
- [16] HU Yumei, SHAO Yimin, CHEN Zaigang, et al. Transient meshing performance of gears with different modification coefficients and helical angles using explicit dynamic FEA [J]. Mechanical System and Signal, 2011, 25(5): 1786-1802.
- [17] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- [18] 孙桓, 陈作模. 机械原理[M]. 6版. 北京: 高等教育出版社, 2003.